SESSION DE 1992

Option M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants

PREMIER PROBLÈME

Soit a un réel strictement positif. Dans un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j), on définit une courbe paramétrée C_1 en coordonnées cartésiennes par :

$$x = a(u - \text{th}(u))$$
$$y = \frac{a}{\text{ch}(u)} .$$

(Le paramètre u décrit $\mathbb{R}$.)

1. Tracer la courbe. On justifiera avec soin l'aspect de la courbe aux éventuels points singuliers.

2. Déterminer la développée de C_1. On la décrira par une équation de la forme $y = f(x)$.

3. Tracer la courbe C_2 d'équations :

$$x = a\left(\cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$$
$$y = a\sin(t).$$

(Le paramètre t décrit $]0, \pi[$.)

4. Montrer que le paramètre t a une interprétation géométrique simple.

5. Montrer à l'aide d'un changement de variable que les deux courbes C_1 et C_2 ont le même support, c'est-à-dire qu'elles sont constituées des mêmes points.

6. M étant un point d'une courbe paramétrée, on note T (s'il existe) le point d'intersection de la tangente à la courbe en M et de l'axe Ox. Rechercher les courbes planes birégulières qui vérifient l'équation $MT = a$. On pourra les supposer paramétrées par α, angle entre Ox et la tangente orientée.

7. Rechercher de même les courbes planes birégulières telles que, pour tout point M, la tangente en M, l'axe Ox et la parallèle à Oy passant par C soient concourantes (C désignant le centre de courbure en M).

Tournez la page S.V.P.

page 224 2/3 1992
E. S. I. M. Math 2

DEUXIÈME PROBLÈME

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

On note :

- O (E) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E ;
- N (x) la norme d'un vecteur x de E ;
- u^* l'adjoint d'un élément u de L (E) ;
- u/F la restriction d'un endomorphisme u à un sous-espace vectoriel F.

On rappelle la définition de la norme d'un élément u de L (E) :

$$|u| = \max \{ N(u(x)) / x \in E, N(x) \leqslant 1 \}.$$

A

1. Soit u et v deux éléments de L (E). Exprimer $(u \circ v)^*$ en fonction de u^* et v^*.
2. Que peut-on dire de u^* si u est élément de O (E) ?

   On considère un élément u de L (E). On note $u' = u^* \circ u$. On désigne par r le rang de u.
3. Montrer que u' est symétrique. u' est-il diagonalisable ?
4. Montrer que Ker (u) = Ker (u') et r = rang (u').
5. Montrer que les valeurs propres de u' sont positives ou nulles. On notera $a_1 \geqslant a_2 \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ les n valeurs propres de u' (non nécessairement distinctes).

   On notera $s_1, \ldots, s_n$ les racines carrées des réels $a_1, \ldots, a_n$. Les nombres s_k seront appelés valeurs singulières de u.
6. On considère une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour $i = 1, 2, \ldots, n$: $u'(e_i) = a_i e_i$.

   Montrer que pour $i = 1, 2, \ldots, r$, $u(e_i) = s_i f_i$. $(f_1, \ldots, f_r)$ étant une base orthonormée de Im (u).
7. Montrer l'existence d'une base orthonormée de E $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour $i = 1, \ldots, n$: $u(e_i) = s_i f_i$.
8. Montrer l'existence d'un endomorphisme symétrique v de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$ et d'un automorphisme orthogonal w tels que $u = v \circ w$.
9. Soit M élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de deux matrices orthogonales P, Q et d'une matrice diagonale D telles que M = PDQ.

B

1. Déterminer les valeurs singulières de u quand u est symétrique.
2. Même question si u est orthogonal.
3. Montrer que si v est élément de O (E), alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs singulières que u.

4. Si u est un élément de GL (E), comparer les valeurs singulières de u et celles de u^{-1}.

5. Que peut-on dire de u si toutes ses valeurs singulières sont identiques ?

6. Dans cette question, E est un plan de base orthonormée (i, j). On définit u par $u(i) = 0$, $u(j) = ai + j$, a étant un réel fixé. Montrer que u est un projecteur et déterminer ses valeurs singulières.

C

1. Exprimer la norme de u en fonction des valeurs singulières de u.

2. On notera F_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

   Montrer que $s_k = \min \{ |u/F| \ / \ F \in F_{n-k+1} \}$.

   On notera désormais $s_k(u)$ au lieu de s_k.

3. Soit u, v, deux éléments de L (E). Montrer que pour tout indice k :

$$s_k(u + v) \leqslant s_k(u) + |v|$$

et

$$|s_k(u) - s_k(v)| \leqslant |u - v|.$$

4. On suppose dans cette question que $s_n(u) > 0$.

   Montrer qu'il existe v élément de L (E) tel que :

$$|v| = s_n(u) \text{ et } u + v \text{ non inversible.}$$

   Montrer aussi que pour tout v élément de L (E) :

$$|v| < s_n(u) \implies u + v \text{ inversible.}$$

5. Étant donné u élément de L (E) et F sous-espace vectoriel de E, montrer que :

$$\dim (u^{-1}(F)) \geqslant \dim (F).$$

   On considère deux entiers p et q tels que p, q et $p + q - 1$ soient compris entre 1 et n. Montrer que si u et v sont deux éléments de L (E), alors :

$$s_{p+q-1}(u \circ v) \leqslant s_p(u)\, s_q(v).$$